CAPÍTULO 18

LA JUSTIFICACIÓN DE LA REGLA DE LOS SIGNOS EN LOS LIBROS DE TEXTO: ¿POR QUÉ MENOS POR MENOS ES MÁS?

BERNARDO GÓMEZ
bernardo.gomez@uv.es
Universidad de Valencia

Con motivo del curso "Historia y educación matemática", del programa de doctorado "Didáctica de las matemáticas" del Departamento homónimo de la Universidad de Valencia, se realizó un trabajo de exploración sobre la evolución de los conceptos de número, unidad, cantidad y magnitud. Una parte de este trabajo se centró en "la regla de los signos". A continuación se presenta una síntesis de la información recogida.

LA UTILIZACIÓN DE TEXTOS HISTÓRICOS EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Para el investigador en Didáctica de las Matemáticas los textos históricos son una fuente de información sobre el desarrollo y la evolución de los conceptos y métodos matemáticos. Éstos muestran que los conceptos matemáticos no se han constituido fácilmente sino que su elaboración es el resultado de un largo proceso. En este sentido podemos decir que los libros de texto ayudan a reconstruir los conceptos, contextualizarlos, conocer sus diversos acercamientos, interrogarse sobre la validez de las formas de argumentar vigentes en otras épocas, y buscar los fundamentos de las formas actuales.

Los textos históricos también informan sobre lo pedagógico: las formas de organizar y presentar el contenido, sus representaciones, las situaciones, problemas y ejercicios utilizados para explicar mejor los conceptos y métodos matemáticos. En este sentido podemos decir que los textos históricos contribuyen al conocimiento de los hechos que fundamentan el currículum enseñado tal y como queda reflejado en los libros de texto.

En Gómez, P., y Rico, L. (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro.* Granada: Editorial Universidad de Granada.

Bien entendido que los textos históricos no son la panacea para el investigador ni para la enseñanza, pero es indudable que bien seleccionados constituyen un pilar sólido para sustentar el trabajo posterior.

El problema a investigar

En la enseñanza de los números negativos se considera que la regla de los signos es algo fácil para los estudiantes, no hay nada que comprender, sólo hay que memorizarla y saberla aplicar. En los manuales escolares la suma de los números con signo se suele justificar con la ayuda de deudas y ganancias, cargos y abonos, (SM, 2º curso, 1998, p. 39), etc. Cuando se aborda la multiplicación, este modelo no funciona. El producto de pérdidas no puede ser una ganancia. En este momento el modelo debe ser abandonado y bien, se propone una alternativa o, se guarda silencio para siempre.

Si se opta por guardar silencio se irá contra la imagen de racionalidad de las matemáticas y esto dejará insatisfechos a profesores y estudiantes, mientras que si se opta por proponer una alternativa habrá que buscarla, y una vez elegida habrá que fundamentar la propuesta de tal modo que sea suficientemente convincente y satisfactoria desde el punto de vista de la lógica matemática y de los requerimientos de los niveles educativos escolares.

Propósito

Con el fin de aportar información que contribuya a facilitar el proceso de búsqueda y selección de un modelo alternativo para la regla de los signos, a continuación se recogen y organizan las principales justificaciones de la misma que se pueden encontrar en los libros que han sido utilizados en la enseñanza.

LAS JUSTIFICACIONES DE LA REGLA Y LAS CONCEPTUALIZACIONES DE LOS NEGATIVOS

Indagando en las fuentes originales relevantes por su prestigio, por su originalidad o por su influencia en nuestro país, se puede constatar que los intentos para justificar la regla de los signos han sido una constante a lo largo del tiempo, y que cuando una argumentación parecía que iba a consolidarse, pronto aparecía otra que, si no la revocaba, era aparentemente más sólida o cuando menos más coherente con una determinada conceptualización de los negativos más o menos dominante. Por ello, para entender estas argumentaciones, no hay que perder de vista las distintas conceptualizaciones de los números negativos a lo largo de su evolución histórica para constituirse como concepto matemático legítimo.

Justificaciones principales

Teniendo en cuenta lo anterior y a los efectos de la presentación de las diversas justificaciones de la regla de los signos que se pueden encontrar en los textos escogidos, estas justificaciones se han organizado bajo los siguientes epígrafes:

- La regla sin justificación.

- La justificación de la regla en el marco de las restas indicadas con solución positiva.
- La justificación de la regla en el marco de las cantidades negativas aisladas.
- La justificación de la regla en el marco en el que se evitan las cantidades negativas aisladas.
- La justificación de la regla en el marco de la teoría de pares ordenados.
- La justificación de la regla en el marco de las modelizaciones intuitivas.

La regla sin justificación de Diofanto (s. III)

Sabemos que hay rastros de los negativos en la época de Diofanto, bien entendido que éste no los consideraba números sino que los rechazaba (Boyer, 1968; Glaeser 1981; Schubring, 1986; González y otros, 1986; Crowley y Dunn, 1985). Así, por ejemplo, rechazaba las ecuaciones tales como $x + 4 = 0$, porque no las consideraba resolubles. Diofanto, haciendo alusión al producto de dos diferencias escribe una especie de regla de los signos.

> Lo que es lo que falta multiplicado por lo que es lo que falta da lo que es positivo; mientras que lo que es lo que falta multiplicado por lo que es positivo, da lo que es lo que falta (Diofanto, libro I)

La justificación de la regla en el marco de las restas indicadas con solución positiva

También hay rastros de los números negativos en las matemáticas chinas e hindúes. Los primeros utilizaban varillas de cálculo negras y rojas para distinguir entre negativo y positivo, y los segundos manejaban números negativos para representar deudas y el cero para la nada. En la obra de Brahmagupta (628) aparecen de forma explícita las reglas de los negativos. Sin embargo, en el legado árabe a Occidente, a diferencia del hindú, sólo se consideran las raíces positivas; aunque conocían las reglas para operar los negativos, sólo las aplicaban a las restas indicadas con solución positiva.

En el Renacimiento la actitud de los matemáticos frente al reconocimiento de los negativos fue diversa, pero lo que es seguro es que operaban con ellos de un modo cada vez más generalizado. En el período final de esta época todavía lo negativo estaba asociado a restas indicadas con solución positiva.

La justificación por doble comprobación, de Stevin (1540-1620)

En este contexto se enmarca la justificación de Stevin (1625, p. 40). Ésta consiste en enunciar la regla y aplicarla a un ejemplo. Después se hace ver que por otro camino se llega al mismo resultado. Para mayor garantía de verosimilitud Stevin también incluye una interpretación geométrica de la regla mediante la representación de los productos que aparecen en el ejemplo con los rectángulos que forman parte de la descomposición de un rectángulo mayor.

Teorema

THEOREME.

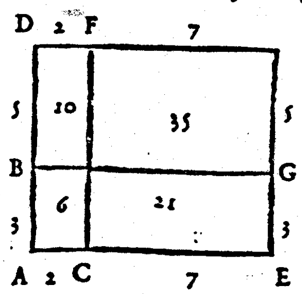
Plus multiplié par plus, donne produict plus, & moins multiplié par moins, donne produict plus, & plus multiplié par moins, ou moins multiplié par plus, donne produict moins.

Explication du donné. Soit 8—5 multiplié par 9—7, en ceſte ſorte; —7 fois —5 font + 35 (+ 35, par ce que, comme dict le theoreme, — par —, faict +) Puis —7 fois 8 faict —56 (—56, par ce que, comme dict eſt au theoreme, — par +, faict —) Et ſemblablement ſoit 8 —5, multiplie par le 9, & donneront produicts 72—45; Puis ajouſtez + 72 + 35, font 107. Puis ajouſtez les —56 —45, font —101; Et ſoubſtraict le 101 de 107 reſte 6, pour produict de telle multiplication. De laquelle la diſpoſition des charactères de l'operation eſt telle:

8 — 5
9 — 7
— 56 + 35
72 — 45
6

Explication du requis. Il faut demonſtrer par ledict donné, que + multiplié par +, faict +, & que — par —, faict +, & que + par —, ou — par +, faict —. *Demonſtration.* Le nombre à multiplier 8—5, vaut 3, & le multiplicateur 9—7 vaut 2; Mais multipliant 2 par 3, le produict eſt 6; Doncques le produict cy deſſus auſſi 6, eſt le vray produict: Mais le meſme eſt trouvé par multiplication, là ou nous avons dict que + multiplié par +, donne produict +, & — par — donne produict +, & + par —, ou — par +, donne produict —, doncques le theoreme eſt veritable.

Autre demonſtration geometrique.



Soit A B 8—5 (à ſçavoir A D 8 — D B 5) Puis A C 9—7 (à ſçavoir A E 9 — E C 7) leur produict ſera C B: ou bien ſelon la multiplication precedante E D 72 — E F 56 — D G 45 + G F 35, Leſquelles nous demonſtrerons eſtre egales à C B en ceſte ſorte. De tout le E D + G F, ſoubſtraict E F, & D G, reſte C B. *Conclusion.* Plus doncques multiplié par plus, donne produict plus. & moins multiplie par moins, donne produict plus, & plus multiplie par moins, ou moins multiplié par plus, donne produict moins; ce qu'il falloit demonſtrer.

Dele

> Más multiplicado por más, da producto más; menos multiplicado por menos, da producto más; más multiplicado por menos, o menos multiplicado por más, da producto menos.
>
> *Explicación*. Sea 8-5 multiplicado por 9-7, de esta manera: -7 veces -5 hacen (+35), porque como dice el teorema - por - hace +. Después -7 veces 8 hace -56 (-56, porque como se dice en el teorema - por + hace -). Y análogamente sea 8-5 multiplicado por el 9, dará como productos 72-45. Después juntad +71+35, que son 107. Después juntad los -56-45, que son 101. Y sustrayendo el 101 del 107, que restan 6, se tiene el producto de la multiplicación dada. La disposición de caracteres de la operación es esta:
>
> $$\begin{array}{l} \quad\ \ 8\ \ -5 \\ \underline{\quad\ \ 9\ \ -7} \\ \quad -56+35 \\ \underline{\ 72-45} \\ \quad 6 \end{array}$$
>
> *Explicación de la regla*. Hay que demostrar por lo enunciado que + multiplicado por + hace +, que - por - hace +, que + por -, o - por +, hace -.
>
> *Demostración* El número a multiplicar, 8-5 vale 3, el multiplicador 9-7 vale 2. Pero multiplicando 2 por 3 el producto es 6. Luego el producto de aquí arriba también es 6, es el producto verdadero. Pero el mismo se ha obtenido por multiplicación, aquella donde hemos dicho que + multiplicado por + da producto +, - por - da producto +, + por -, o - por + da producto -, luego el teorema es verdadero.
>
> *Otra demostración geométrica*. Sea AB 8-5 (a saber AD 8 -DB 5). Después, AC 9-7 (a saber AE 9 - EC 7). Su producto será CB, o bien según la multiplicación DE 72 - EF 56 - DG 45 + GF 35. Los cuales demostraremos que son iguales a CB de esta forma. De todo el ED+GF, se sustrae EF y DG, resta CB.
>
> *Conclusión* Luego más multiplicado por más, da producto más; menos multiplicado por menos, da producto más; más multiplicado por menos, o menos multiplicado por más, da producto menos, que era lo que había que demostrar.

La justificación de la regla en el marco de las cantidades negativas aisladas

En el desarrollo posterior de las matemáticas a lo largo del siglo XVII, el uso de los negativos se extiende como artificios de cálculo. A medida que se generalizaba el uso del álgebra resultaba cada vez más común trabajar con cantidades negativas aisladas. Éstas surgían como raíces de ecuaciones y admitirlas permitía una regla general de resolución y la reconstrucción de ecuaciones a través de raíces; pero estas expresiones con signo negativo no encajaban con la idea que se tenía de cantidad y de número: el número era lo que expresaba la cantidad; cantidad y magnitud se identificaban entre sí, y ambas se vinculaban al mundo físico. ¿Cómo se las ingeniaban los matemáticos para interpretarlas, para darles significado sensible, y para justificar lógicamente sus propiedades y sus reglas de cálculo?

Las cantidades adjetivadas con un signo

Por una parte se consideraba que en álgebra las cantidades no sólo necesitaban para su determinación su valor absoluto sino que también había que atender a su sentido.

Esto dividía las cantidades en dos clases, como las líneas que van en un sentido o en el directamente opuesto, el tiempo pasado o el futuro, el dinero que se posee o que se debe, el movimiento hacia adelante o hacia atrás. A estas cantidades se les llamó cantidades algebraicas, para diferenciarlas de las aritméticas. Las cantidades algebraicas eran las que iban acompañadas del signo, el cual actuaba como un adjetivo: + y - modificaban el significado de las cantidades de la misma manera que un adjetivo modificaba el significado de un sustantivo.

Las cantidades menores que cero

Por otra parte, las necesidades del cálculo algebraico, al extender la sustracción más allá del caso en que el sustraendo era menor que el minuendo, conservando el orden numérico, traía consigo la aparición de cantidades que habían de ser consideradas menores que cero y, por tanto, menores que cualquier cantidad positiva.

> Esto se puede ver con un ejemplo sencillo. Dados dos números cualesquiera, como 3 y 5, y restando el mayor a ambos lados de la desigualdad que forman, $3 < 5$, se tiene: $(3 - 5 = -2) < (5 - 5 = 0)$.

Dos concepciones del cero

Estas dos concepciones, la de cantidades adjetivadas, que era de tipo conceptual y la de cantidades menores que cero, que era de tipo empírico, estarán presentes simultáneamente en muchos de los razonamientos de la época y darán lugar a dos concepciones del “cero”. En efecto, aceptar la existencia de cantidades menores que cero suponía una ruptura con la concepción absoluta del cero: aquello por debajo de lo cual no había nada, al hacer su aparición el cero relativo u origen, aquello que se marcaba arbitrariamente sobre un eje orientado. Se entendía que lo que es absurdo de hacer con el cero absoluto, sustraer una cantidad más grande de materia de una más pequeña, era perfectamente legítimo con el cero-origen.

Es en este marco en el que se aceptan las cantidades negativas aisladas y que la sustracción no se limita al caso en que el sustraendo es menor que el minuendo, en el que cabe situar las siguientes justificaciones:

La justificación por eliminación, de Euler (1707-1783)

Euler en sus *Elementos de Algebra* (1770, p. 35) argumenta a partir de la interpretación de los negativos como deudas, considera que la multiplicación de cantidades con signo es conmutativa y razona por eliminación diciendo que -a por -b será ab ya que no puede ser -ab que es lo que vale -a por b.

> Comencemos por multiplicar -a por 3 o +3. Ahora puesto que -a debe ser considerado como una deuda, es evidente que si tomamos esa deuda tres veces, debe volverse tres veces más grande, y consecuentemente el producto requerido es -3a. Por eso si multiplicamos -a por +b, obtenemos -ba, o, lo que es lo mismo, -ab. Luego concluimos, que si una cantidad positiva se multiplica por una cantidad negativa, el producto debe ser negativo; y la regla es que + por + hace + o más, y al contrario + por -, o - por + da -, o menos.
>
> Queda por resolver el caso en que - se multiplica por -; o, por ejemplo, -a por -b. Es evidente, a primera vista, mirando las letras, que el producto será ab; pero

es dudoso si debe ponerse delante del producto el signo +, o el signo -; todo lo que sabemos es que debe ser uno u otro de esos signos. Ahora digo que no puede ser el signo - porque -a por +b da -ab, y -a por -b no puede producir el mismo resultado que -a por +b; sino que debe producir el contrario, esto es, +ab; consecuentemente tenemos la siguiente regla: multiplicar por - produce +, en la misma manera que + multiplicado por +.

La justificación en coherencia con la propiedad distributiva, de Mac-Laurin (1698-1746)

Mac-Laurin, en su *Tratado de álgebra* (1748), argumenta en coherencia con la propiedad distributiva a partir de que si a - a = 0, 0 = n(a-a) debe ser y -na = n(-a). Lo peculiar de su razonamiento es que presenta aspectos de tipo formal, alejados de las interpretaciones físicas y orientados a la estructura de las operaciones.

> Se llaman cantidades positivas, o afirmativas, aquellas que están precedidas del signo +, y negativas, aquellas que están precedidas del signo -.
>
> Para tener una idea clara y exacta de estas dos especies de cantidades, hay que señalar que toda cantidad puede entrar en el cálculo algebraico, como añadida, o como sustraída, es decir, como aumentación o como disminución; y que la oposición que se encuentra entre la aumentación y la disminución, tiene lugar en la comparación de cantidades: por ejemplo, entre el valor del dinero debido a un hombre, y el dinero que él debe;... Así, la cantidad negativa, en lugar de ser menos rigurosamente menos que nada, no es menos real en su especie que la cantidad positiva, pero tomada en sentido opuesto; de aquí que una cantidad considerada sola no debería ser negativa, que no lo es salvo por comparación, y que cuando la cantidad que se llama positiva, no tiene otra que le sea opuesta, no se le podría sustraer de una más grande: por ejemplo, sería absurdo querer sustraer una cantidad más grande de materia de una más pequeña...
>
> De aquí se podrá deducir la regla de los signos tal y como es costumbre enunciarla, esto es que los signos semejantes en los términos del multiplicador y del multiplicando dan + al producto, y que los signos diferentes dan -. Hemos evitado esta manera de presentar la regla, para ahorrar a los principiantes la chocante expresión - por - da +, que es una consecuencia necesaria de la regla: podemos, como hemos hecho disfrazarla, pero no aniquilarla o contradecirla; el lector, sin apercibirse, habrá observado todo el sentido en los ejemplos precedentes; familiarizado con la cosa, podrá aún espantarse de las palabras? Si le queda encima algún escrúpulo, que haga atención a la demostración siguiente que ataca directamente la dificultad.
>
> +a - a = 0, así para cualquier cantidad que multipliquemos por +a - a el producto debe dar 0: si multiplico por n, tendré para el primer término +na, luego tendré para el segundo -na, ya que es preciso que los dos términos se destruyan. Luego los signos diferentes dan - al producto. Si multiplico +a -a por -n, por el caso precedente, tendré -na para el primer término; luego tendré +na para el segundo, porque siempre hace falta que los dos términos se destruyan; luego - multiplicado por - da + en el producto. (Cit. Glaeser, 1981, p. 318)

La justificación en coherencia con la propiedad distributiva, de Laplace (1749-1827)

Laplace, en sus lecciones de *L'École normale de l'an III* (1795, p. 62), no logra desprenderse de la interpretación de los negativos como deudas, pero en su argumentación modifica la demostración de Euler en la línea de justificación con aspectos formales iniciada por Mac-Laurin, y recurre a la conservación de la coherencia de las operaciones: suma, multiplicación y distributividad de una con la otra.

> En cuanto al signo del producto, debe ser positivo si los signos del multiplicando y del multiplicador son los mismos, si son diferentes, el signo del producto debe ser negativo. Esta regla presenta algunas dificultades: cuesta concebir que el producto de -a por -b sea el mismo que el de a por b. Para hacer sensible esta identidad, observaremos que el producto de -a por +b, es - ab, ya que este producto no es mas que -a repetido tantas veces como unidades hay en b. En seguida observaremos que el producto de -a por +b -b es nulo, al ser nulo el multiplicador; así siendo -ab el producto de -a por +b, el producto de -a por -b, debe ser de un signo contrario, o igual a +ab, para destruirlo.

La justificación a partir de la definición de producto de los signos, de Cauchy (1789-1857)

Cauchy en su *Curso de Análisis*. 1ª (1821, p. 2 y 403) partiendo de que las cantidades algebraicas son diferentes de las aritméticas, argumenta de una manera muy peculiar mediante la introducción de la idea de producto de los signos: "Multiplicar uno por otro dos signos, es formar su producto".

> Como, en el caso en que la letra A representa un número, se puede, después de lo que se acaba de decir, designar la cantidad positiva cuyo valor numérico es igual a A, ya sea por +A, ya sea solamente por A, mientras que -A designa la cantidad opuesta, es decir, la cantidad negativa cuyo valor numérico es A.…
> Después de estas convenciones, si se representa por A ya sea un número, ya sea una cantidad cualquiera y se hace a = +A; b = -A, se tendrá: +a = +A, +b = -A, -a = -A, -b = +A. Si en las cuatro últimas ecuaciones se sustituye a y b por sus valores entre paréntesis, se tendrán las fórmulas: +(+A) = +A, +(-A) = -A, -(+A) = -A, -(-A) = +A. En cada una de estas fórmulas el signo del segundo miembro es lo que llamamos producto de los dos signos del primero. Multiplicar uno por otro dos signos, es formar su producto. La inspección de las ecuaciones anteriores es suficiente para establecer la regla de los signos, comprendida en el teorema que voy a enunciar.
> Teorema. El producto de dos signos semejantes es siempre +, y el producto de dos signos opuestos es siempre -. (p. 407)

La justificación desde la definición del producto por un número negativo, de Wentworth y Smith (1900)

En la serie para escolares de Wentworth y Smith (serie de 1900) se recoge la tradición de las deudas y se recurre a la conservación de la coherencia de la propiedad conmutativa. De su definición de multiplicar por un número negativo concluye la regla inmediatamente:

> Multiplicación y división de números negativos. Los números negativos se multiplican y dividen lo mismo que los positivos. Si una persona que tiene -\$5 (debe \$5) duplica su deuda, tendrá -\$10. Así pues,
>
> (-\$5) x 2 = -\$10
> -\$10 ÷ 2 = -\$5
>
> Multiplicación por un número negativo. La multiplicación de un número cualquiera por un número negativo no puede efectuarse mientras no se sepa el significado que tiene aquí la palabra multiplicación. Hemos visto que (-2)x3 = -6. para que se cumpla la ley de que el orden de los factores no altera el producto, es preciso que se tenga: 3 x (-2) = -6. Definiremos pues la multiplicación por un número negativo diciendo que es el producto, cambiado de signo, que resulta de multiplicar por el valor absoluto del número principio (Wentworth y Smith, p.40).

La justificación en coherencia con la propiedad distributiva, sin hacer ninguna suposición acerca de qué cosa son los números negativos

Crowley y Dunn (1985) en *Mathematics Teacher* recogen varios tipos justificaciones de la regla. Una de ellas es una alternativa a la demostración de Laplace con un carácter más formal. Ésta es:

$$(-1)(-1) = (-1)(-1) + (0)(1) = (-1)(-1) + ((-1+1)(1)) = (-1)(-1) + (-1)(1) + (1)(1) = (-1)(-1+1) + (1)(1) = (-1)(0) + (1)(1) = (1)(1).$$

La justificación de la regla en el marco en el que se rehuyen las cantidades negativas aisladas

Una posición diferente respecto a los negativos con motivo de las controversias que suscitaba la consideración de que las cantidades negativas tenían que ser menores que cero, buscaba evitar o rehuir las cantidades negativas aisladas. En este marco donde los negativos son cantidades que hay que sustraer se sitúan las siguientes justificaciones:

La justificación a partir de la definición de multiplicación por negativo, de D'Alembert (1717-1783)

D'Alembert, en el artículo titulado *Negativo* aparecido en la *Enciclopedia* de Diderot, señalaba que las cantidades negativas en el cálculo lo que realmente indican son cantidades positivas, pero que se ha supuesto en una falsa posición. “El signo - que encontramos delante de una cantidad sirve para corregir un error cometido en la hipótesis”. Apoyándose en esta idea su justificación de la regla se sustenta en que multiplicar por una cantidad negativa equivale a sustraer tantas veces como indica esa cantidad.

> Real y absolutamente no hay cantidades negativas aisladas: -3 tomado en abstracto no significa ninguna idea para el espíritu; pero si digo que un hombre ha dado a otro -3 ecus, eso quiere decir en lenguaje inteligible, que le ha cogido 3 ecus.

> He aquí porque el producto de -a por -b da +ab: porque a y b estando precedidos del signo   por lo supuesto, es una marca de que las cantidades a, b, se encuentran mezcladas y combinadas con otras con las que se comparan, puesto que si estuvieran consideradas como solas y aisladas, los signos - que las preceden, no significarían nada para el espíritu. Luego esas cantidades -a y -b no se encontrarían precedidas del signo -, mas que porque hay cierto error tácito en la hipótesis del problema o de la operación: si el problema estuviera bien enunciado, esas cantidades -a y -b, deberían encontrarse cada una con el signo +, y entonces el producto sería +ab, ya que ¿qué significa la multiplicación de -a por -b?, significa que se resta b veces la cantidad negativa a: pero que hemos dado aquí arriba de cantidades negativas, añadir o poner una cantidad negativa equivale a restar una positiva, y por la misma razón restar una negativa, equivale a añadir una positiva.(cit. Glaeser, 1981, p. 324)

La justificación a partir de la definición de multiplicación por negativo, de Lacroix (1766-1846)

Lacroix, en su *Curso completo elemental de Matemáticas Puras* (1846, 6º ed), parte de que la multiplicación algebraica es lo mismo que la multiplicación aritmética y basa su argumentación en la vieja idea de que las cantidades negativas se generan como resultado de la sustracción de una cantidad que es mayor que aquella de que se quiere sustraer. Por eso trabaja sobre productos de la forma (a-b)(c-d).

> Mientras no consideremos a las letras sino como símbolos de números, deberemos formarnos de la multiplicación algebraica la misma idea que de la multiplicación aritmética. Por manera que multiplicar a por b es hallar, o mejor decir, es representar una tercera cantidad que se haya con respecto a cualquiera de aquellos dos factores, del mismo modo que el otro factor se ha con respecto a la unidad,...
>
> Si el multiplicando tuviese algunas partes sustractivas, los productos de estas partes deberán restarse de los demás, o lo que equivale a lo mismo, se les deberá poner el signo - para indicar aquella sustracción. Si por ejemplo nos proponemos multiplicar a-b por c, el producto será ac - bc,... Supongamos ahora que el multiplicador tenga términos sustractivos, siendo aditivos todos los del multiplicando; y aunque tratándose, como aquí se trata, de números abstractos, pudiéramos tomar por multiplicando el multiplicador, y hallar por las reglas establecidas el producto, propongámonos determinarlo sin necesidad de hacer aquella inversión. Hayamos por ejemplo de multiplicar
>
> | | |
> |---|---|
> | | a |
> | | por b-c |
> | Producto | ab-ac |
>
> Puesto que el multiplicador no es ni b ni c, ni la suma de estos dos números, sino que es el residuo que quede en quitando c de b, el verdadero producto no deberá ser ab, ni ac, ni ab+ac sino ab-ac, es decir, el multiplicando a tomado tantas veces como unidades hay en b, menos el mismo multiplicando a tomado tantas veces como unidades hay en c; de cuya sustracción debe resultar el

multiplicando a tomado tantas veces como unidades hay en b-c, y de consiguiente el producto que buscamos,... Supongamos por último que tanto el multiplicando como el multiplicador tengan términos sustractivos, proponiéndonos por ejemplo multiplicar

	a-b
	por c-d
y el producto será	ac-bc-ad+bd

porque todo el multiplicando a-b se ha de multiplicar primeramente por la parte c del multiplicador; después se debe multiplicar todo el multiplicando por la otra parte de del multiplicador; y siendo sustractiva esta segunda parte, deberemos restar del primer producto parcial el segundo. Ahora bien, el primer producto parcial es ac-bc; el segundo es ad-bd; y cambiando los signos de este para representar el residuo resulta el producto que buscábamos, cual lo hemos representado. (p. 60-70)

La justificación a partir de la definición de multiplicación algebraica, de Vallejo (1779-1846)

Vallejo, en su célebre *Tratado Elemental de Matemáticas* (1841 p. 185-199), matiza la idea de cantidad negativa en estos términos: "Las cantidades negativas son una manera de ser de las cantidades algebraicas contraria al propósito que se propone en la cuestión". También matiza la de multiplicación algebraica, que define por extensión de la aritmética pero con la única diferencia de introducir en ella la condición del signo: "Multiplicar en Álgebra es tomar una cantidad tantas veces como diga otra; y tomarla del mismo modo que diga se debe tomar"; esto le permite obtener la regla casi de modo inmediato como consecuencia de la definición.

Multiplicar en Álgebra es tomar una cantidad tantas veces como diga otra; y tomarla del mismo modo que diga se debe tomar. Añadimos aquí esta circunstancia, porque como en el Álgebra no solo se atiende al valor absoluto de las cantidades, sino también a su modo de existir, el multiplicador con sus unidades nos dice las veces que debemos tomar el multiplicando y, con su signo el modo con que le debemos tomar...

Para demostrar nosotros la regla de los signos, nos propondremos multiplicar +a por +b, o para mayor sencillez y claridad, tomaremos por multiplicador la unidad; y así indicaremos nuestra operación de este modo: +a x +1; ahora, el multiplicador +1 nos dice con sus unidades que tomaremos una vez al multiplicando, y con su signo + nos dice que le tomemos como él sea; el multiplicando +a es positivo luego le deberemos tomar una vez positivamente, y será por consiguiente el producto +1a o +a, omitiendo el coeficiente 1; luego +ax+1=+a; que en cuanto a los signos en abstracto da +x+=+.

Supongamos ahora que el multiplicador sea -1, y tendremos indicada nuestra operación de este modo +a x-1, aquí el multiplicador con sus unidades nos dice que debemos tomar una vez al multiplicando, y con su signo que le tomemos al contrario de como él sea; el multiplicando es positivo, luego le deberemos to-

> mar una vez negativamente, y se tendrá: +a x-1= -1a= -a; lo que en punto a los signos da: + x - = -.
>
> Supongamos ahora que el multiplicando sea negativo tal como -a, si el multiplicador es +1, tendremos indicada la operación de este modo: -a x +1; donde el multiplicador +1 nos dice con sus unidades que debemos tomar una vez al multiplicando, y con su signo que le deberemos tomar una vez negativamente, y será: -a x +1 = -1a = -a; lo que da para los signos: -x+=-.
>
> Finalmente si el multiplicador fuese -1 tendríamos indicada la operación de este modo: -a x -1; donde el multiplicador -1, nos dice con sus unidades que debemos tomar el multiplicando una vez, y con su signo que le debemos tomar al contrario de como él sea; el multiplicando es negativo, luego le deberemos tomar positivamente, y se tendrá: -a x -1=+1a=a; lo que da para los signos: - x - = +.

El modelo usado por Vallejo va a ser reproducido por los autores españoles más importantes hasta bien entrado el siglo XX, como por ejemplo, Picatoste (1907), Miguel y González (1931), o Mataix (1941). El único cambio resaltable es la actualización del lenguaje y la incorporación de los paréntesis.

> ... si el multiplicador es una cantidad positiva, el producto será del mismo signo que el multiplicando, y tendremos dos casos: (+ a) x (+ b) = + ab y (- a) x (+ b) = - ab.
>
> Si el multiplicador es negativo, por ser de signo contrario de la unidad positiva, el producto ha de ser también de signo contrario al del multiplicando, y tendremos estos otros dos casos: (+ a) x (-b) = - ab y (- a) x (- b) = + ab. (Miguel y González, 1931, p. 75)

La justificación de la regla en el marco de la teoría de pares ordenados

Con el tiempo, el proceso de reconceptualización de la noción de número seguiría su curso hasta culminar en el alejamiento definitivo de la realidad física. Hoy, las matemáticas han dejado de ser consideradas como la ciencia de los cantidades o de los números. La palabra número ha sido redefinida, así como sus dos operaciones fundamentales. En este contexto se enmarca la siguiente justificación:

Roanes, en *Didáctica de las matemáticas* (1976, p. 274-293), basa su argumentación en la teoría de los pares ordenados, donde la regla no es más que una consecuencia de la definición del producto: (a, b) x (c, d) = (ac+bd, ad+bc).

> Define sobre el conjunto NxN, comprendido el cero, una relación: (a, b) ~ (c, d) $\Leftrightarrow$ a+d=c+b. Prueba que es de equivalencia; es decir, que es reflexiva, simétrica y transitiva. Define los números enteros Z como cada una de las clases del conjunto cociente NxN/~. Define lo representantes canónicos: (m, 0), (0, n) y define los números enteros positivos y negativos. Prueba que todas las clases tienen un representante canónico. Establece una aplicación inyectiva de N en Z que asocia al conjunto de números 1, 2, 3,...; el conjunto de los números enteros positivos, para identificar los positivos con +m y los negativos con -n. Define las

leyes de composición internas y prueba que con ellas Z tiene estructura de anillo conmutativo con elemento unidad.

Adición: (a, b) + (c, d) = (a+c, b+d). Demuestra la propiedad uniforme o propiedad de estabilidad de la suma frente a la relación de equivalencia (la suma es independiente de los pares elegidos). Demuestra que (Z, +) es un grupo aditivo. Demuestra que la correspondencia de N $\longrightarrow$ Z+ es compatible con la adición. Por tanto ambos grupos son isomorfos.

Multiplicación: (a, b) x (c, d) = (ac+bd, ad+bc). Demuestra la propiedad uniforme o de estabilidad del producto frente a la relación de equivalencia. Demuestra que Z es un semigrupo multiplicativo conmutativo y con elemento neutro.

De la definición del producto deduce la llamada regla de los signos:

Sea r un entero positivo y (p, 0) su representante canónico.

Sea s un entero negativo y (0, q) su representante canónico.

R·s = {{(p, 0)}}·{{(0, q)}}= {{(p·0+0·q, p·q+0·0)}}= {{(0, pq)}}

que es negativo, ya que el natural pq es distinto de cero, por serlo p y q.

La justificación de la regla en el marco de las modelizaciones intuitivas

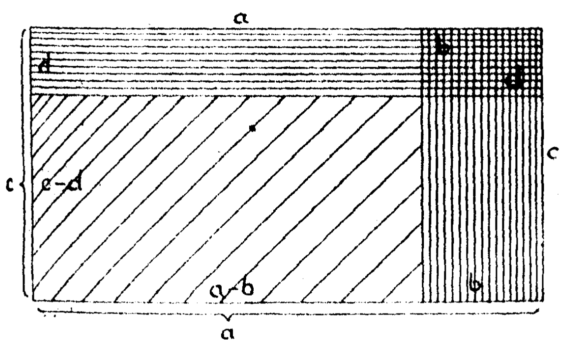
En los libros de este siglo, con una orientación más intuitiva o divulgativa, es posible encontrar otras justificaciones basadas en la modelización física, geométrica o numérica. Lo atractivo de estos últimos modelos es que son consistentes con nuestra experiencia personal y ayudan a los estudiantes a hacer plausible la regla, pero no son demostraciones. En este marco cabe situar las siguientes.

La justificación desde la modelización geométrica sobre rectángulos de Klein

Klein, en *Matemática elemental desde un punto de vista superior* (1908), recurre a este modelo, ya visto en Stevin, como un primer acercamiento para su posterior generalización. Primero justifica la llamada “regla del paréntesis” y después hace el paso a la regla de los signos razonando sobre un rectángulo donde los factores de una resta indicada representan los lados y los productos las áreas. Con esto logra un primer acercamiento que después generaliza:

> Sea a>b y c>d; en cuyo caso también a-b y c-d son números enteros positivos. Veamos qué ocurre con el producto (a-b)(c-d). Para ello tracemos un rectángulo de lados a-b y c-d, cuya área es el número (a-b)(c-d) buscado; este rectángulo es una parte del de lados a y c.
>
> Para obtener aquél partiendo de éste, quitaremos el rectángulo superior que aparece rayado horizontalmente y vale ad; después el rectángulo de la derecha de rayado vertical bc; estos dos tienen uno en común; el rectángulo bd, que, por consiguiente, aparece quitado dos veces, de modo que habrá de ser agregado una para obtener el (a-b)(c-d), con lo cual queda demostrada la fórmula

(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd (2).



Observemos en este punto que con la introducción de los números negativos se manifiesta claramente la facultad de generalización de que está dotada la mente humana, por virtud de la cual, sin darnos cuenta de ello, nos sentimos inclinados a extender y aplicar a cuestiones más generales conceptos y reglas deducidos y válidos para casos particulares. Esta tendencia aplicada a la Aritmética, cristaliza en el llamado *Principio de permanencia de las leyes formales*, explícitamente enunciado por primera vez por Hermann Hankel en su interesantísima y muy recomendable obra *Theorie der Komlexen Zahlsysteme*.

Este principio general aplicado al caso que ahora nos ocupa del paso a los números negativos, nos diría que basta prescindir en las fórmulas (1) y (2) de las relaciones de magnitud de a y b, y aplicar dicho principio a otros casos. Si, por ejemplo, en la fórmula (2), hacemos a = c = 0, caso en que la fórmula no está demostrada, se obtiene (-b)(-d) = +bd, es decir, la regla de los signos de la multiplicación de números negativos.

La justificación desde la modelización física sobre desplazamientos, de Rey Pastor y Puig Adam

Rey Pastor y Puig Adam, en *Nociones de álgebra y trigonometría.*(1946 p. 19 y 20), se basan en el desplazamiento que se modeliza situando un objeto o persona sobre el cero de una recta graduada. Un desplazamiento a la izquierda se interpreta como un movimiento en dirección negativa; un desplazamiento a la derecha se denota como un movimiento en dirección positiva. El tiempo futuro se denota con un valor positivo, y el tiempo pasado se denota con un valor negativo.

Observemos el movimiento de trenes entre Zaragoza y Madrid, y viceversa, desde una estación intermedia, por ejemplo Calatayud, que tomaremos como origen.

En este punto circulan trenes en los dos sentidos, de modo que podemos considerar como positivas las distancias y velocidades hacia Madrid, y negativas las contrarias.

Tomemos también un origen de tiempos en un momento dado, y consideremos como positivos los tiempos transcurridos después de este instante y negativos los transcurridos anteriormente.

Supongamos un tren corriendo a 60 Km. por hora hacia Madrid (velocidad +60). ¿A qué distancia de Calatayud estará dos horas después (+2) de su paso por éste? Será 60x2 = 180 km. hacia Madrid, es decir +120, y expresaremos abreviadamente la operación así:

$(1)(+60)\cdot(+2) = +120$

En cambio, dos horas antes (-2) estaría también a 120 km. del lado de Zaragoza, es decir, -120, y pondremos análogamente:

$(2)(+60)\cdot(-2) = -120$

Si, por el contrario, el tren va hacia Zaragoza (velocidad -60) los signos se invierten, y escribiríamos:

$(3)(-60)\cdot(+2) = -120$

$(4)(-60)\cdot(-2) = +120$

Las multiplicaciones simbólicas (1), (2), (3) y (4) expresan de un modo abreviado la resolución del problema en los cuatro casos que cabe considerar, según el sentido del movimiento y el tiempo. Vemos que en la (1) y (4) los dos factores son del mismo signo, y el producto es positivo, en cambio en las (2) y (3) los factores son de signos contrarios y el producto es negativo.

Esta misma regla, llamada regla de los signos, es válida en otras clases de productos de cantidades positivas y negativas que se presentan en las Ciencias de aplicación, como, por ejemplo, en los momentos de las fuerzas, el trabajo, etc. Parece, pues, natural enunciar esta definición abstracta:

Se llama producto de dos números al número que se obtiene multiplicando los valores absolutos y dando al producto el signo + o el -, según que los factores sean de igual o distinto signo.

La justificación desde la modelización geométrica sobre la línea numérica, de "El obrero mecánico"

En *El obrero mecánico* (1938, pp. 263-266), se parte de la modelización de los números positivos y negativos como puntos sobre la línea numérica a partir de un punto origen, y de que el producto por -1 es convertir un número en su simétrico.

Números negativos. Un punto cualquiera, O, de una recta define sobre ella, como se sabe, dos sentidos opuestos cuyo origen común es el citado punto.

N D

-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

> Si a partir de él, en cada punto de ambos sentidos y con la misma unidad, se señalan los puntos 1, 2, 3, 4..., el carácter de oposición se hace evidente afectando de signo menos a los puntos que aparecen a la izquierda del origen.
> La recta, en estas condiciones, recibe el nombre de eje.
> El segmento 3 estará representado por OP y el segmento -4 por ON.
> Números opuestos son los que, teniendo igual valor, su sentido es también opuesto: son de signo contrario y simétricos respecto al origen...
> Con estos convenios es posible realizar la diferencia de dos segmentos cualesquiera, sin ningún género de restricciones. Si se resta gráficamente de un segmento de 7 unidades otro de 3, el resultado será 4, porque el sentido del segmento resultado aparece, a partir del origen, dirigido hacia la derecha. El cálculo sería 7-3=4. Si se pretende efectuar la diferencia entre los segmentos 2 y 5, el resultado sería un segmento que, medido a partir del origen, vendría expresado `por el segmento -3 y sería 2-5=3. En estos cálculos se tiene sobreentendida la unidad u. Si hubiéramos querido ponerla de manifiesto, se hubiera escrito en los dos casos anteriores: 7u-3u=4u y 2u-5u=-3u. De igual modo si la unidad, o magnitud de referencia, hubiera sido otra cualquiera se hubiera tenido 12a-5a=7a, 3'5x-7'5x=-3´7x
> Multiplicación algebraica. Si un segmento de 3 unidades lo vamos llevando, sucesivamente, a partes del origen, 4 veces en su mismo sentido, se ha obtenido otro nuevo segmento cuyo valor es de 12 unidades; esto es, 4x3=12. Realizando la misma operación con el segmento -3, 4 hubiera formado un segmento de -12 unidades; esto es, 4 veces -3 unidades: 4(-3) = -12
> Multiplicar por -1 un número cualquiera es convertirlo en su simétrico. Así: (-1)4 = -4, (-1)(-5) = 5. Multiplicarlo por -2 es duplicarlo e invertirlo: (-2)4 = -8. En general, multiplicar un factor negativo por un número cualquiera, es efectuar el producto, como si aquél fuera positivo, y al resultado se invierte el signo para obtener su simétrico. Así: (-4)3=-12, (-5) (-3)=15
> Resumen: El producto de dos factores del mismo signo es positivo y el de dos factores de signo contrario es negativo.

La justificación desde la modelización numérica

Crowley y Dunn (1985) en *Mathematics Teacher* presentan una alternativa que consiste en modelizar un patrón numérico conducente a una conjetura suficientemente fiable para ayudar a los estudiantes a hacer plausible la regla. Se da por conocido el producto de dos números positivos y de dos números con signos y se propone una actividad de descubrimiento del patrón como la que sigue:

> Actividad:
> Completa el patrón:
> (-3)◊(+3) = -9
> (-3)◊(+2) = -6
> (-3)◊(+1) = -3
> (-3)◊(0) = 0
> (-3)◊(-1) =
> (-3)◊(-2) =
> (-3)◊(-3) =
> El patrón que se ve es que los productos aumentan de 3 en 3.

OBJECIONES

Todas estas justificaciones se pueden agrupar en cuatro grandes categorías. A saber:

- Comprobaciones.
- Consecuencia de la coherencia con alguna propiedad aritmética, normalmente la propiedad distributiva.
- Consecuencia de alguna definición previa, como cuando se utilizó la definición de cantidad algebraica y la definición de multiplicación algebraica y más recientemente la de número negativo y la de multiplicación de números negativos.
- Modelizaciones con ayuda de alguna situación geométrica, física o numérica.

Todas ellas han podido ser consideradas como apropiadas por razones diferentes y en momentos diferentes. Encontrar las razones de su abandono, sus debilidades y sus aportaciones no es una tarea fácil, es un desafío para un trabajo posterior. No obstante, se pueden adelantar algunas de estas razones:

- Las comprobaciones son demasiado ingenuas.
- Las justificaciones en coherencia con las propiedades argumentan llevándolas de un campo numérico a otro diferente. Euler o Laplace, por ejemplo, plantean la conmutatividad sin darse cuenta de que en su razonamiento están ante una ley externa.
- Las justificaciones en coherencia con una definición o no se sitúan en un plano suficientemente formal o son demasiado formales. Lacroix concluye que para tener el producto (b-c)a es necesario quitar ac de ab, pero esto no explica por qué -c por a es -ac. Cauchy establece la multiplicación de signos pero no la multiplicación de negativos.
- Las modelizaciones preparan a los estudiantes, de un modo intuitivo, a aceptar la razonabilidad del resultado, pero no ofrecen ninguna información acerca de la necesidad matemática de la regla.

CONCLUSIONES

Pero, ¿se puede demostrar que - por - es +? Lo anterior muestra que los matemáticos así lo han creído, porque lo han intentado innumerables veces y de diversas formas. Sin embargo, en la actualidad se suele decir que la regla no se demuestra sino que es una consecuencia de la definición de números negativos. Esta idea, que está presente en el estilo de justificación que se impuso en el siglo XIX, no parece que sea escolarmente hablando la más apropiada. ¿Acaso no sería mejor recurrir a alguna de las cuatro categorías de justificaciones históricas, más o menos actualizada, según sea el nivel de rigor exigido? La respuesta a esta pregunta puede venir de la mano de argumentos fundamentados en la investigación didáctica.

NOTA

No se han incorporado las justificaciones geométricas basadas en el producto de segmentos a partir de Descartes, las relaciones de semejanza de Thales y su generalización a las rectas orientadas. Una versión de las mismas se puede encontrar en Varo (2000).

REFERENCIAS

Crowley, M. y Dunn, K. (1985). On multiplying negative numbers. *Mathematics teacher., 78* (4), 252-256.

Cauchy, A. (1998) *Curso de Análisis. 1ª parte Análisis algebraico*. (Original de 1821). Sevilla: Thales. 1998.

Euler (1797). *Elementos de Algebra.* Traducido del francés con anotaciones críticas e históricas de M. Bernoulli, añadidas por M. De la Grange. Vol. I. London: J. Johnson.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2* (3), 303-346.

González J. y otros. (1989). *Números enteros.* Madrid: Síntesis.

Klein, Félix (1908?). *Matemática elemental desde un punto de vista superior. Vol I. Aritmética-Algebra-Análisis*. (Traducción de Roberto Araujo) Madrid. Nuevas Gráficas.

Lacroix, S. F. (1846) *Curso completo elemental de Matemáticas Puras.Tomo II. Algebra. Sexta edición*. Compuesto en francés por S. F. Lacroix, traducido al castellano por D. Josef Rebollo y Morales, catedrático de los Caballeros Pages de S. M. (Primera edición del original 1819. Título: Cours Complet de Mathématiques à l'usage de l'Ecole centrale des Quatre -Nations; Ouvrage adopté par le Gouvernement pour les Lycées, écoles secondaires, Collèges, etc.) Madrid: Imprenta Nacional.

Laplace (1795). 1ª Lección de la Escuela Normal. En J. Dhombres (Ed.), *L'École normale de l'an III. Leçons de Mathématiques. Laplace-Lagrange-Monge* (pp. 9-141). Paris: Dunod. 1992.

Mataix, C. (1941). *Algebra práctica.* 2ª Ed. Madrid: Nuevas Gráficas.

Miguel y González-Miranda, J. A. (1931*). Elementos de álgebra y nociones de trogonometría. Contestaciones al programa de 10 de Octubre de 1931 para el ingreso en la Escuela de Telegrafía en la clase de oficiales de Telégrafos*. Primera Edición. Madrid: Editorial Reus.

Picatoste, F. (1907). *Elementos de Matemáticas.* Novena edición. Madrid: Librería sucesores de Hernando.

Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1946). *Nociones de álgebra y trigonometría.* Primera parte. Madrid. Imp. A. Aguado.

Roanes, E. (1976). *Didáctica de las matemáticas.* Salamanca: Anaya.

Schubring, G. (1986). *Discussions épistémologiques sur le status des nombres négatifs et leur représentation dans les manuels allemands et français des mathématiques entre 1795 et 1845*. Actas del primer coloquio franco-alemán, 137-45.

Stevin, S. (1585). L'arithmétique et la pratique de l'arithmétique. La Disme. En Girard (Ed.),*Les oeuvres mathématiques*. Leyden.1625 o 1634.

Vallejo, J. M. (1841). *Tratado Elemental de Matemáticas.escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino*. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Madrid: Imp Garrayasaza.

Varo, A. J. (2000). La regla de los signos. *Summa*, *34*, 69-71.

Wentworth, G, A. y Smith, D. E. (19?). *Elementos de álgebra*. (Falta frontis)